Dénombrement des diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$.

Thm : Soit $D_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$.

$$|D_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_q=n \\ m_i\in\mathbb{N}}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

Le groupe $GL_n(\mathbb{F}_q)$ agit par conjugaison sur $D_n(\mathbb{F}_q)$.

Pour $M \in D_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{Orb}(M) = \{PMP^{-1}, P\in GL_n(\mathbb{F}_q)\}$.

Par diagonalisabilité, il existe $m = (m_1,\dots,m_q)\in\mathbb{N}^q$, $m_1+\dots+m_q = n$ et $D_m = \mathrm{diag}(\alpha_i I_{m_i}) \in \mathrm{Orb}(M)$. avec la notation $\mathbb{F}_q = \{\alpha_1,\dots,\alpha_q\}$

Si $D_{m'} = PD_mP^{-1} \in \mathrm{Orb}(D_m)$, alors $\chi_{D_{m'}} = \det(P(XI_n - D_m)P^{-1}) = \chi_{D_m}$

$$= \prod_{i=1}^{q} (X-\alpha_i)^{m_i}$$

Donc par unicité de la décomposition en irréductibles, $m_i = m_i'$, $\forall i$, i.e. $m=m'$

Ainsi, $D_n(\mathbb{F}_q) = \bigsqcup_{m_1+\dots+m_q=n} \mathrm{Orb}(D_m)$ car les orbites forment une partition.

Par la relation orbite-stabilisateur, $|\mathrm{Orb}(D_m)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{Stab}(D_m)|}$

Or, si $P\in \mathrm{Stab}(D_m)$, $PD_mP^{-1} = D_m$, i.e. $PD_m = D_mP$

et si $x \in E_\lambda(D_m)$, $D_mPX = PD_mX = \lambda PX$; donc $PX \in E_\lambda(D_m)$.

autrement dit, P laisse stable les sous-espaces propres de D_m.

Puisque $\mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{\lambda\in Sp(D_m)} E_\lambda(D_m)$, P est de la forme $\mathrm{diag}(P_i)$, $P_i \in GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)$

Donc calculer $|\mathrm{Stab}(D_m)|$ revient à compter les matrices de la forme ci-dessus, i.e. $|\mathrm{Stab}(D_m)| = \prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|$.

Ainsi, $|D_n(\mathbb{F}_q)| = \displaystyle\sum_{\substack{m_1+\dots+m_q=n \\ m_i\in\mathbb{N}}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$

De plus, compter $GL_n(\mathbb{F}_q)$ revient à compter les bases de $\mathbb{F}_q^n$ (les colonnes de la matrice forment une base de $\mathbb{F}_q^n$) et il y a q^n-1 choix pour le premier élément, $q^n - q = |\mathbb{F}_q^n \setminus \mathrm{Vect}\{e_1\}|$ pour le second, ainsi de suite.

De là, $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$